Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις

$f_1, \dots, f_n$: γραμμικώς εξαρτημένες στο A

$\exists\, c_1, \dots, c_n$ σταθερές με $|c_1| + \dots + |c_n| \neq 0$

$$c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0, \ \forall x \in A$$

**Εφαρμογή:**

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x) = |x| \\ f_2(x) = x^3 \\ f_3(x) = x \end{array}\right\}$$ και έχουμε το σύνολο $A = \{-1, 0, 1\}$

Είναι γρ. εξαρτημένες ή γραμμικώς ανεξάρτητες;

**Λύση:**

$$c_1 |x| + c_2 x^3 + c_3 x = 0 \quad \forall x \in A$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 - c_3 = 0 \end{cases}$$ άρα σε αυτό το σύνολο είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

Σε ένα άλλο σύνολο μπορεί να ήταν γραμμ. ανεξάρτητες

**Ασκ 3 σελ 83:**

(iv) $f_1(x) = x^2 - x + 3$

$f_2(x) = 2x^2 + x$

$f_3(x) = 2x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.

**Λύση:**

θέλουμε $0 = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x)$

$\Rightarrow 0 = c_1[x^2 - x + 3] + c_2 \cdot [2x^2 + x] + c_3 \cdot [2x - 4]$

$\Rightarrow 0 = (c_1 + 2c_2)x^2 + (-c_1 + c_2 + 2c_3)x + 3c_1 - 4c_3 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -2c_2 \\ -c_1 + c_2 + 2c_3 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 + 2c_3 = \dots \\ 3c_1 - 4c_3 = 0 \end{cases}$$

προσθεση οριζουσών

πχ) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & x \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+4 & 3+x \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

Διάσπαση οριζουσας: σπαμε τα στοιχεια μιας γραμμής ή μιας στήλης και αφήνουμε τα υπόλοιπα ίδια.

ορισμός: Αν $f_1, \dots, f_n$ "n-1" φορές παραγωγίσιμες στο I. Η συνάρτηση $W: I \to \mathbb{R}$ με

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$ καλείται ορίζουσα Wronski.

παράδειγμα: Ποια η ορίζουσα wronski των

$$\begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_2(x) = \cos x \\ f_3(x) = e^x \end{cases}$$

Λυση

$$W(f_1, f_2, f_3)(x) = \begin{vmatrix} x^2 & \cos x & e^x \\ 2x & -\sin x & e^x \\ 2 & -\cos x & e^x \end{vmatrix}$$

$$= e^x \cdot \begin{vmatrix} x^2 & \cos x & 1 \\ 2x & -\sin x & 1 \\ 2 & -\cos x & 1 \end{vmatrix} = e^x \cdot \begin{vmatrix} x^2 & \cos x & 1 \\ 2x - x^2 & -\sin x - \cos x & 0 \\ 2 - x^2 & -\cos x - \cos x & 0 \end{vmatrix}$$

Άσκ. Β.1 (λυμένες)

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ Δεν μηδενίζεται σε n διάφορα σημεία

Ν.δ.ο $f_k(x)= x^k f(x)$, $k=1,\dots,n$ , $f(x_i)\neq 0$ $i=1,\dots,n$

αυτές είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Λύση

$c_1 f_1(x)+\dots+c_n f_n(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$.

$c_1 x f(x)+\dots+c_n x^n f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$.

$\xRightarrow{x=x_1}$ $c_1 x_1 f(x_1)+\dots+c_n x_1^n f(x_1)=0$.

$\Rightarrow c_1x_1+c_2x_1^2+\dots+c_n x_1^n=0$

$\Rightarrow x_1(c_1+c_2x_1+\dots+c_n\cdot x_1^{n-1})=0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2x_1+\dots+c_n x_1^{n-1}=0.\\ \quad\vdots \\ c_1+c_2x_n+\dots+c_n x_n^{n-1}=0.\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & & x_n^{n-1}\end{vmatrix} =$$

$$=\prod_{\substack{i>j\\ i,j=1}}^{n}(x_i-x_j)\neq 0$$

$\underbrace{a_n y^{(n)}+\dots+a_1 y'+a_0 y}_{L(y)}=0$, $x\in I$ | $a_i\in C(I)$ $a_n(x)\neq 0$

Γραμμικός τελεστής

$L(\kappa f_1 + \lambda f_2) = \kappa L(f_1) + \kappa L f_2$

Για $n=1$ : όλες οι λύσεις της $\alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0$ $x \in I$

$$y(x) = y(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{\alpha_0}{\alpha_1}(s) ds}$$

$x \in I$.

Θεώρημα 3 Αν $c_1, \dots, c_k$ είναι σταθερές και $y_1, \dots, y_k$ λύσεις της $(E_n^0)$ τότε η συνάρτηση
$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ , $x \in I$.
Είναι επίσης λύσεις της $(E_n^0)$

$$L(y) = L\left(\sum_{i=1}^{k} c_i y_i\right)$$

($y_i \to$ λύση της ομογενούς εξίσωσης)

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i L(y_i) = 0 \ , x \in I.$$

Θεώρημα 4: Ας είναι $y_1, \dots, y_n$ λύσεις της $(E_n^0)$.
Οι $y_1, \dots, y_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες αν και μόνο αν $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$, $x \in I$.

Απόδειξη

"$\Leftarrow$" Υποθέτουμε ότι $W(y_1, \dots, y_n)(y) \neq 0$ , $x \in I$
θα αποδείξω ότι οι λύσεις $y_1, \dots, y_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες

Ας είναι $c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = 0$, $x \in I$.

Έχουμε ότι
$$\begin{cases} c_1 y_1'(x) + \dots + c_n y_n'(x) = 0. \\ \dots\dots\dots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}(x) = w(y_1,\dots,y_n)(x) \neq 0 \Rightarrow c_1 \dots c_n$$

"$\Rightarrow$" Έστω ότι οι $y_1, \dots, y_n$ (λύσεις) είναι γραμμικώς ανεξάρτητες

θα αποδείξω ότι $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0, x \in I$.

Εις άτοπο απαγωγή

Έστω ότι υπάρχει $W(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$

$\exists x_0 \in I$ με $w(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$

θεωρώ το σύστημα * [ως προς $c_1, \dots, c_n$] | * ένα γραμμ. αλγεβρ. σύστημα

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 \dots + c_n y_n'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

και παρατηρώ ότι η ορίζουσα του συστήματος είναι $w(y_1, \dots, y_n)(x_0) = 0$ άρα το σύστημα έχει μια μη τετριμμένη λύση $c_1, c_2, \dots c_n$ με $|c_1| + \dots + |c_n| = 0$.

όμως τότε η συνάρτηση $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, $x \in I$

είναι λύση του συστήματος $(\Sigma_n^0)$ η οποία ικανοποιεί τις αρχ. συνθήκες

$$\begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \Rightarrow y(x) = 0, x \in I.$$

$\exists\, c_1, \dots, c_n$ με $|c_1| + \dots + |c_n| = 0$ με $c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$ $\forall x \in I$.

$\rightsquigarrow y_1, \dots, y_n$ γρ. εξαρτ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. (Liouville)

Για $y_1, \dots, y_n$ λύσεις της $(E_1^0)$ ισχύει ότι

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = W(y_1, \dots, y_n)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{\alpha_n(s)}{\alpha_0(s)}\, ds}, \quad x \in I.$$

Απόδειξη: Για $x \in I$ έχουμε ($\overset{\text{εξήγηση}}{\dots}$ γιατί $W$ παραγ. στο $I$)

$$W'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \begin{vmatrix} y_1 & y_n \\ y_1' & y_n' \\ \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ & \dots & & \end{vmatrix}}_{0} + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \end{vmatrix}}_{0}$$

$$+ \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & & y_n' \\ y_1^{(n-2)} & & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ y_1^{(n-2)} & & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \qquad \left\{ y_i^{(n)} = -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_i^{(n-1)} - \dots - \frac{\alpha_0}{\alpha_n} y_i \right.$$

$$= \dots = -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} W(y_1, \dots, y_n)(x)$$

δηλ. η $W(y_1, \dots, y_n)(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$w'(x) + \frac{\alpha_{n-1}(x)}{\alpha_n} w(x) = 0.$$